Université Joseph Fourier – Grenoble 1

Cours de Mathématiques Appliquées – MAP35G

Année 2015-2016

Feuille d'exercices n° 1

Algèbre Linéaire

Exercice 1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on s'intéresse au système linéaire*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y &=& u \\ \sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y &=& v \end{array} \right. .$$

(a) *Montrer que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, ce système à une solution unique que l'on déterminera.*

(b) *Montrer que (x, y) est solution du système si et seulement si $e^{i\alpha}(x + iy) = u + iv$. En déduire une manière de trouver (x, y) à partir de (u, v).*

(c) *Donner une interprétation géométrique des résultats précédents.*

Exercice 2 *Parmi les matrices suivantes , calculez tous les produits possibles. Donnez également la transposée des matrices A et B.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AB et BA.

Exercice 4 *Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire*

$$\left\{\begin{array}{llllll} -x & +y & +2z & = & u \\ 3x & -2y & +z & = & v \\ x & -y & -3z & = & w. \end{array}\right.$$

(a) *Ecrire ce système sous forme matricielle.*

(b) *Résoudre le système. En déduire que la matrice*

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculez son inverse.

Exercice 5 *On rappelle qu'une matrice carrée est symétrique si elle est égale à sa transposée. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices carrées symétriques à n lignes.*

(a) *Montrer que $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.*

(b) *Montrer que le produit de deux matrices symétriques A et B est symétrique si et seulement si $AB = BA$ (on dit que A et B « commutent »).*

(c) *Soit A une matrice inversible. Montrer que A^{T} est inversible et que son inverse est $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.*

(d) *Soit A une matrice symétrique et inversible. Montrer que son inverse est symétrique.*

Exercice 6 *Soit* $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. *On considère le système linéaire :*

$$\begin{cases} 3x & -2y & +z & = & u \\ 2x & +y & -z & = & v \\ x & +y & -2z & = & w. \end{cases}$$

(a) *Mettre le système sous forme matricielle* $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

(b) *Mettre le système sous forme échelonnée. On notera* A_1, A_2, *les matrices obtenues à chaque étape. Montrer que* A_{n+1} *peut s'écrire comme un produit d'une matrice* B_n *avec la matrice* A_n.

(c) *Montrez que les matrices* B_n *sont inversibles. En déduire que* A *est inversible et calculez* A^{-1} *à l'aide des matrices* B_n.

Exercice 7 *On considère les vecteurs* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *Forment-ils une famille libre ? Forment-ils une famille génératrice ?*
Calculez l'inverse de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Exercice 8 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) *Calculer le déterminant de* M_α *et déterminer les valeurs de* α *pour lesquelles l'application linéaire associée est bijective.*

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) *Soit dans* (u, v, w) *une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *telle que* $u = (1, 1, \alpha)$, $v = (1, \alpha, 1)$, $w = (\alpha, 1, 1)$. *Pour quelles valeurs de* α, (u, v, w) *est-elle une famille libre ? une base ?*

Exercice 9 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) *Tracer l'image du cercle unité de* $\mathbb{R}^2$ *par la transformation* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(b) *Montrer que 2 directions du plan sont invariantes par cette transformation. Montrez que tout couple de 2 vecteurs (non nuls) de chacune de ces directions forme une base de* $\mathbb{R}^2$.

(c) *Donner le déterminant et le rang de* A. *Conclure.*

Exercice 10 *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$. *On note* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *On considère la famille de vecteurs*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

(a) *Sous quelles conditions portant sur* a, b, *la famille* $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *est-elle une famille libre dans* $\mathbb{R}^3$ *?*

(b) *Sous quelles conditions portant sur* a, b, *la famille* $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *est-elle génératrice de* $\mathbb{R}^3$ *?*

(c) *Soit* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire définie par*

$$\phi(\vec{e}_1) = \vec{x},\ \phi(\vec{e}_2) = \vec{y},\ \phi(\vec{e}_3) = \vec{z}.$$

Calculez l'image $\phi(\vec{u})$ *d'un vecteur quelconque* $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

(d) *Quelle est la matrice* A *représentative de* ϕ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *?*

(e) *À quelles conditions portant sur* a, b, *la matrice* A *est-elle inversible ?*

(f) *On suppose* $a = 0$, $b = -1$. *Déterminez* A^{-1}.