Université Joseph Fourier – Grenoble 1

Cours de Mathématiques Appliquées – MAP35G

Année 2015-2016

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Analyse

Exercice 1 (a) *Montrer que les applications suivantes sont des normes sur* $\mathbb{R}^n$ *:*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_\infty = \max_{i=1,..,n} |x_i|$$

(b) *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \quad et \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

(c) *Pour les normes* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, *et* $\|\cdot\|_\infty$, *représenter graphiquement le disque unité dans* $\mathbb{R}^2$ *défini pour une norme* $\|\cdot\|$ *par* $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. *Confirmer graphiquement les inégalités de la question (b).*

(d) *A partir du dessin précedent, montrer que* $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{2}\|x\|_2$ *dans* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 [Echauffement] *Pour chacune des fonctions suivantes :* (a) *déterminer le domaine de définition,* (b) *calculer leurs dérivées là où celles-ci sont définies,* (c) *donner leur limites aux bornes de leurs domaines de définition.*

$$f_1(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}, \qquad f_2(x) = \sin(\frac{1}{x}),$$
$$f_3(x) = \frac{x^3 - 2x}{(x-1)^2 - 1}.$$

Exercice 3 *Calculer le développement de Taylor à l'ordre* 5 *des fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = \tfrac{1}{1-x}, \qquad f_2(x) = \cos(x), \qquad f_3(x) = \sin(x),$$
$$f_4(x) = e^x, \qquad f_5(x) = \cos(2x), \qquad f_6(x) = \tfrac{1}{1-x^2}.$$

Exercice 4 *Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et calculez leurs dérivées partielles, là où celles-ci sont définies.*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 e^{xy}, \\ f_2(x,y) &= \ln(x+\sqrt{x^2+y^2}), \\ f_3(x,y) &= \sin^2(x)+\cos^2(y), \\ f_4(x,y,z) &= x^2y^2\sqrt{z}. \end{aligned}$$

Exercice 5 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Calculez les dérivées partielles des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= f(x+y), \\ g_2(x,y) &= f(x^2+y^2), \\ g_3(x,y) &= f(xy). \end{aligned}$$

Exercice 6 *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases} x & si\ |x|>|y|, \\ y & si\ |x|<|y|, \\ 0 & si\ |x|=|y|, \end{cases}$$

Étudiez la continuité de f, l'existence de dérivées partielles et la continuité de ces dernières.

Exercice 7 *Soit $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un polynôme. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x,y)=P((x+iy)^2+1)$.*
Montrez que

$$\Delta f(x,y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

Exercice 8 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on pose $g(\rho, \theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.*

(a) *Calculez $\dfrac{\partial g}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.*

(b) *En déduire l'expression de ∇f et Δf en coordonnées polaires.*

Exercice 9 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$\begin{cases} f(x,y) &= x^2 + y^2 - 2x^2y - \dfrac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{cases}$$

(a) *Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*

(b) *Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et $g_t(r) = f(r\cos(t), r\sin(t))$. Montrez que g_t admet un minimum local strict en $r = 0$.*

(c) *Calculez $f(x, x^2)$. Qu'en concluez vous ?*

Exercice 10 *On considère n couples de réels $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ et on cherche la droite d'équation $y = ax + b$ qui passe au mieux par ces points, au sens où la somme des carrés des distances entre l'ordonnée d'un point et l'ordonnée du point de la droite de même abscisse soit minimale.*

(a) *Posez le problème comme la minimisation d'une fonction de (a, b).*

(b) *Calculez le gradient de cette fonction et déduisez les valeurs optimales de a, b.*

Exercice 11 *Soit A une matrice carrée de taille n et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$.*

(a) *Donner le domaine de définition de f et montrer que f est convexe.*

(b) *Calculer $\nabla f(x)$. Sous quelle condition et pour quelle valeur de x a-t-on $\nabla f(x) = 0$. Conclure.*

(c) *Montrer que $\nabla f(x)$ est Lipschitzienne et donner une constante de Lipschitz associée. En déduire un algorithme du gradient à pas constant pour miniser f.*

(d) *Calculer $\nabla^2 f(x)$. En déduire un algorithme du gradient de Newton pour miniser f.*

Exercice 12 *Pour chacune des applications suivantes :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & x^2+y^2-xy, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} f_2 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & x^2-y^2-xy, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_3 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & x^3+y^3-x^2y^2, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} f_4 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & 4x^2+4y^2-(x+y)^4. \end{array}\right.$$

(a) *Calculez* ∇f_i.

(b) *Donnez l'équation du plan tangent à la surface d'équation* $z = f_i(x,y)$, *aux points* $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$.

(c) *Déterminez les points critiques de* f_i.

(d) *Calculez la matrice hessienne de* f_i.

(e) *Soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = e^{-x}$. *Calculez directement, puis en utilisant les dérivées partielles de* f_i, *la dérivée de l'application* $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $h_i(x) = f_i(x, g(x))$.

(f) *Pour chacun des points critiques de* f_i, *donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice hessienne.*

(g) *Pour chacun des points critiques de* f_i, *précisez si l'on a affaire à un extremum global de* f_i.

Exercice 13 *Donnez une valeur approchée des quantités suivantes pour* $x = 3,04$ *et* $y = 2,05$ *:*

$$x^2y^3, \quad x^{-1}+y^{-1}, \quad \frac{x+y}{x-y} \quad \frac{\ln(x-y)}{xy}.$$