Université Joseph Fourier – Grenoble 1

Cours de Mathématiques Appliquées – MAP35G

Année 2015-2016

Feuille d'exercices n° 3

Equations différentielles

Exercice 1 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

$$\begin{array}{rclr} y'(t) & = & y(t)+t, & y(0)=1, \\ y'(t) & = & y(t)+\sin(t), & y(0)=1, \\ y'(t) & = & -2y(t)+(t-2)^2, & y(0)=0, \\ y'(t) & = & -2ty(t)+t, & y(0)=y_0. \end{array}$$

Exercice 2 *On considère l'équation différentielle*

$$y'(t) - \frac{1}{t}y(t) - (y(t))^2 = -9t^2. \tag{1}$$

a) *Montrez qu'il existe un nombre* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $y(t) = at$ *soit solution de* (1)*. On note* y_0 *cette solution.*

b) *Montrez que le changement de fonction inconnue* $y(t) = y_0(t) - 1/z(t)$ *transforme l'équation* (1) *en l'équation suivante :*

$$z'(t) + \left(6t + \frac{1}{t}\right) z(t) = 1. \tag{2}$$

c) *Déterminez l'ensemble des solutions de* (2)*, définies sur* $]0, +\infty[$*. En déduire l'ensemble des solutions de* (1)*, définies sur* $]0, +\infty[$*.*

Exercice 3 ***(Régulateur de Foucault)*** *Un point P de masse m est accrochée à un fil sans masse enroulé autour d'un cylindre homogène de rayon R, de masse M et d'axe horizontal fixe. La chute du point P entraîne la rotation du cylindre. Ce cylindre, muni d'ailettes, est soumis à la résistance de l'air que l'on représente par un couple de frottement $-f\theta'$, où $\omega = \theta'$ représente la vitesse de rotation du cylindre. Le système étant abandonné sans vitesse initiale, on veut déterminer la fonction ω. On note z la longueur parcourue par le point P. La mise en équation fait apparaître les relations suivantes :*

- *en appliquant le théorème du moment cinétique : $J\theta'' = -f\theta' + RT$, où $J = \frac{1}{2}MR^2$ est le moment d'inertie du cylindre et T est une force.*
- *en appliquant le principe fondamental de la dynamique pour le point P : $mz'' = mg - T$.*

a) *Quelle est la longueur Δz parcourue par M lorsque le cylindre tourne d'un angle $\Delta\theta$? En déduire une relation entre z'' et θ''.*
b) *Trouver une équation différentielle vérifiée par ω.*
c) *Résoudre cette équation. Que peut-on en conclure pour le mouvement de la poulie lorsque t devient grand ?*
d) *Question subsidiaire : que se passe-t-il si on enlève les ailettes ?*

Exercice 4 *On considère un système masse–ressort modélisé par l'équation différentielle ordinaire suivante :*

$$my''(t) + 2cy'(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t), \tag{3}$$

dans laquelle, pour simplifier on supposera que la masse $m = 1$. On supposera aussi dans un premier temps que le coefficient d'amortissement $c = 1$ et que terme de forçage $f = 0$.
a) *Transformez cette EDO d'ordre 2 en un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1. On posera $Y_1(t) = y(t)$, $Y_2(t) = y'(t)$ et on écrira le système sous la forme*

$$Y'(t) + AY(t) = b(t). \tag{4}$$

b) *On suppose que $\omega_0^2 \neq 1$. Donnez la forme de la solution générale de de l'EDO (4).*
c) *On suppose que $\omega_0^2 = 1$. Montrez que dans ce cas, la fonction $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$, où $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$, est solution de (4).*
d) *Quelle est l'allure qualitative des solutions dans les trois cas, $0 < \omega_0 < 1$, $\omega_0 = 1$, $\omega_0 > 1$ lorsque $0 < t < \infty$?*
e) *On suppose désormais que le coefficient d'amortissement c est quelconque et que le terme de forçage f prend la forme $f(t) = F\sin(\omega t)$. Trouvez une solution particulière de (4) de la forme*

$$y_p(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t).$$

f) *Montrez qu'en choisissant convenablement les valeurs de c et ω, l'amplitude du mouvement $y_p(t)$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.*

Exercice 5 ***(Modèle de croissance des plantes de Verhulst)*** *Un jardinier repique une plante de 0,1 m de haut dans une serre et observe sa croissance. La loi de Verhulst exprime la croissance de la plante en fonction du temps : soit $y(t)$ la taille (en mètres) de la plante après t jours sous la serre, alors on a*

$$y'(t) = ay(t)(1 - y(t))$$

où a est une constante déterminée expérimentalement.
a) *Pour résoudre l'équation différentielle* (5)*, on pose $z(t) = 1/y(t)$ (en supposant que y ne s'annule pas). Déterminez l'équation différentielle vérifiée par la fonction z.*
b) *Montrez que z vérifie la condition initiale $z(0) = 10$ et résolvez l'équation différentielle en z obtenue à la question précédente.*
c) *Déduire des questions précédentes que la solution $y(t)$ de* (5) *vérifiant la condition initiale appropriée est*

$$y(t) = \frac{1}{1 + 9e^{-at}}.$$

d) *Au bout de 15 jours, le jardinier constate que la plante mesure* $0,19$ *m. Calculez le coefficient a (on arrondira à* 10^{-2} *près).*
e) *Montrez que $y(t)$ tend vers une valeur limite, que vous déterminerez, lorsque $t \to +\infty$. Montrez également que pour tout $t > 0$, $y'(t) > 0$. Donnez un tableau de variations de la fonction y (pour $t > 0$) et donnez l'allure de son graphe.*
f) *Au bout de combien de jours la plante aura-t'elle atteint une hauteur de* $0,9$ *m ?*

Exercice 6 *Un parachutiste tombe à une vitesse de 55 m.s^{-1} au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps ($t = 0$, en secondes) à ce moment là. Pour tout $t \geq 0$, on note $v(t)$ la vitesse (en m.s^{-1}) du parachutiste à l'instant t. On admet que la résistance de l'air est donnée par*

$$R = Pv(t)^2/25,$$

où P est le poids du parachutiste avec son équipement ($P = mg$, m masse et $g = 9,81$ m.s^{-2}).
a) *Démontrer que v est solution de l'équation différentielle :*

$$v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right).$$

b) *On suppose que $v(t) > 5$ pour $t \geq 0$, et on pose*

$$u(t) = \frac{1}{v(t) - 5}.$$

Déterminer une équation différentielle satisfaite par u et la résoudre.
c) *En déduire une expression de $v(t)$ en fonction de t.*
d) *Quelle est la vitesse limite du parachutiste lorsque t tend vers $+\infty$?*
