Université Joseph Fourier – Grenoble 1

Cours de Mathématiques Appliquées – MAP35G

Année 2015-2016

Travaux Pratiques n° 3

Equation Différentielles

I Introduction à la résolution d'équations différentielles

Représenter de manière exacte ou approchée la solution d'une équation différentielle est une question centrale en mathématiques appliquées. En effet, de nombreux phénomènes physiques peuvent être modélisés par une relation différentielle, par exemple :
– Le principe fondamental de la dynamique (seconde loi de Newton)

$$m\ddot{x}(t) = \sum_i F_i(x(t))$$

– L'évolution des concentrations dans les réactions chimiques, pour $A \to B \to C$

$$\frac{\mathrm{d}[B](t)}{\mathrm{d}t} = k_1 a \exp(-k_1 t) - k_2[B](t)$$

Suivant la complexité de l'équation différentielle, la solution peut être obtenue de manière *formelle* ou l'équation doit être résolue *numériquement*.

La résolution formelle, comme on l'a vu en cours, est fondée sur l'identification d'une certaine forme particulière (linéaire, à coefficients constants, etc.) et sur l'intégration de fonctions. Cette méthode est mise en œuvre dans les logiciels de calcul formel comme *Mathematica*, *Wolfram Alpha*, *Maple*, *XCas*, ou encore *Maxima*.

La résolution numérique est basée sur l'approximation d'une équation différentielle par discrétisation, c'est-à-dire le passage d'une équation définie sur un intervalle continu (ex. $\mathbb{R}$) à un ensemble discret (ex. $\mathbb{Z}$). Cette méthode est utilisée dans les logiciels de calcul numérique comme *Matlab*, *Octave*, *Scilab*, ou encore *FreeFem++*.

Dans ce TP, nous allons nous concentrer sur les méthodes de résolution numérique ; mais d'abord, examinons deux équations différentielles à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

1) Ouvrir `www.wolframalpha.com` dans votre navigateur.
Entrer `solve( y' = -2*t*y^2 , y(0) = 1 )` *et observer le résultat.*
Entrer `solve( t*y'' + y' + t*y = 0 , y(0) = 1)` *et comparer.*

Nous observons que des équations différentielles semblant pourtant simples à premier abord peuvent ne pas admettre de solutions représentables à l'aide des fonctions usuelles (puissance, exponentielle, logarithme, sinus, ...). Dans ce cas, une résolution numérique est nécessaire.

II Résolution numérique d'équations différentielles

II.1 Problème considéré

Dans cette partie, nous allons examiner et comparer différentes méthodes de résolution numérique d'équation différentielle. Afin de faciliter l'évaluation des différentes méthodes, nous considérerons un problème différentiel dont la solution formelle est calculable :

$$\begin{cases} y'(t) = -2ty^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

2) Vérifier que la fonction $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$ *est bien solution du problème de Cauchy* (1)*.*

II.2 Quelques méthodes numériques

Une équation différentielle d'ordre 1 s'écrit sous forme générale

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Discrétiser en temps un problème différentiel c'est trouver les valeurs de la fonction y en des temps $t = kh$ où h est le *pas de discrétisation* et $k \in \mathbb{Z}$. Ensuite, à partir de la condition initiale $y(0) = y_0$, il s'agit d'approcher $y(t)$ en calculant successivement $y(h), y(2h), ..., y(kh) = y(t)$.

Nous noterons alors $y_k = y(hk)$. Ainsi, la dérivée première de y en $t = hk$ se discrétise en

$$y'(t) \hookrightarrow \frac{y_{k+1} - y_k}{h}. \tag{3}$$

3) Montrer que $\frac{y_{k+1}-y_k}{h}$ *tend vers* $y'(hk) = y'(t)$ *quand* h *tend vers* 0.

Alors que $y'(t)$ a été discrétisé assez naturellement, discrétiser $f(t, y(t))$ est moins trivial. Différentes possibilités sont considérées dans la littérature, nous allons présenter les plus célèbres.

Nom de la méthode	$f(t, y(t)) \hookrightarrow f(?, ?)$
Euler (explicite)	$f(t, y(t)) \hookrightarrow f(hk, y_k)$
Proximal (Euler implicite)	$f(t, y(t)) \hookrightarrow f(h(k+1), y_{k+1})$
Runge-Kutta d'ordre 4	$p_{k,1} = f(hk, y_k)$ $p_{k,2} = f(h(k+\frac{1}{2}), y_k + \frac{h}{2}p_{k,1})$ $p_{k,3} = f(h(k+\frac{1}{2}), y_k + \frac{h}{2}p_{k,2})$ $p_{k,4} = f(h(k+1), y_k + hp_{k,3})$ $f(t, y(t)) \hookrightarrow \frac{1}{6}(p_{k,1} + 2p_{k,2} + 2p_{k,3} + p_{k,4})$

Nous avons maintenant les discrétisations nécessaires pour établir un algorithme d'approximation. Par exemple, avec la méthode d'Euler, l'algorithme se trouve ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} &= f(hk, y_k) \\ \Rightarrow \ y_{k+1} &= y_k + hf(hk, y_k). \end{aligned}$$

II.3 Résolution numérique en pratique

Pour résumer, approcher numériquement une équation différentielle, c'est choisir :
- un intervalle $[0, T]$ sur lequel on veut approcher la solution de l'équation ;
- un nombre de points de discrétisation K, donnant un pas de temps $h = T/K$;
- une méthode d'approximation.

4) *Montrer que l'algorithme d'approximation par la méthode d'Euler pour le problème différentiel* (1) *s'écrit*

$$y_{k+1} = y_k - 2h^2 k y_k^2.$$

5) *Implémenter ces itérations sur l'intervalle* $[0, 0.5]$ *pour différents nombres de points de discrétisation* $K = 2, 5, 10, 50, 100$. *Comparer graphiquement avec la solution formelle.*

6) *Calculer les itérations obtenues avec la méthode d'approximation proximale. Comparer graphiquement la méthode d'Euler et la méthode proximale pour* $T = 0.5$ *et* $K = 5$.

II.4 Problèmes plus raides

Le problème différentiel (1) a une solution qui comporte des pentes plutôt faibles. Dans la pratique, ces pentes peuvent être beaucoup plus importantes, des fonctions exponentielles apparaissant souvent dans les solutions d'équations différentielles. Considérons ce nouveau problème :

$$\begin{cases} y'(t) = -150y(t) + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} + \delta \end{cases} \tag{4}$$

7) *Montrer que* $y(t) = \frac{1}{5} + \delta \exp(-150t)$ *est solution du problème* (4).

8) *Calculer une solution numérique par approximation d'Euler avec* $\delta = 0.1$ *sur* $[0, 1]$ *en utilisant un pas* $h = \frac{1}{50}$. *Qu'observe-t-on graphiquement ? A-t-on le même phénomène en utilisant l'approximation proximale ?*

9) *Représenter graphiquement la solution formelle, l'approximation d'Euler et proximale avec les mêmes paramètres mais un pas deux fois plus fin* $h = \frac{1}{100}$. *Qu'observe-t-on ? Conclure.*

III Application : un problème de type proie/prédateur

Les équations de *Lotka-Volterra*, que l'on désigne aussi sous le terme de *modèle proie-prédateur*, sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent. Elles ont été proposées indépendamment par Alfred James Lotka en 1925 et Vito Volterra en 1926.

Ce système d'équations est classiquement utilisé comme modèle pour la dynamique du lynx et du lièvre des neiges, pour laquelle de nombreuses données de terrain ont été collectées sur les populations des deux espèces par la Compagnie de la baie d'Hudson au XIXe siècle.

$$\text{Il s'écrit} \quad \begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = -y(t)(\gamma - \delta x(t)) \end{cases} \tag{5}$$

où
- t est le temps,
- $x(t)$ est l'effectif des *proies*,
- $y(t)$ est l'effectif des *prédateurs*.

On se place ainsi dans le régime des grandes populations, c'est-à-dire que les effectifs sont considérés réels et non plus entiers ; ainsi, on s'intéresse aux comportements globaux et pas individuels ($x(0) = 1$ peut ainsi représenter un ensemble d'individus très peuplé et pas un unique individu). L'analyse en est facilitée et modélise bien les comportements observés en pratique. En revanche, à cause des non-linéarités, ce système n'est pas résolu à ce jour de manière formelle.

Les paramètres du modèle caractérisent les interactions entre les deux populations :
- α est le taux de reproduction des proies,
- β est le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés,
- γ est le taux de mortalité des prédateurs,
- δ est le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées.

9) *Montrer que sans prédateurs, la population des proies croit exponentiellement ; et que sans proies, la population des prédateurs décroît exponentiellement. Montrer que le système possède deux équilibres, un dit* trivial*, quand les deux populations sont nulles, et un autre à identifier.*

10) *Calculer l'approximation d'Euler du système de Lotka-Volterra sur* $[0, 20]$ *avec* 2000 *points de discrétisation et les paramètres suivants :* $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{4}{3}, \gamma = 1, \delta = 1$ *et* $x(0) = y(0) = 1$.
Représenter x *et* y *en fonction de* t.

11) *On peut montrer que les solutions du système de Lotka-Volterra sont périodiques autour de l'équilibre non-trivial. Dans le cas précédent, représenter* y *en fonction de* x *ainsi que l'équilibre non-trivial. Observe-t-on la périodicité souhaitée ?*

La méthode d'Euler n'est pas suffisante pour approximer les solutions du système de Lotka-Volterra. Nous allons donc considérer d'autres approximations.

12) *Tenter de calculer les itérations produites par l'approximation proximale. Quelle difficulté nouvelle rencontre-t-on ? Comment pourrait-t-on y remédier ?*

13) *Calculer les itérations produites par l'approximation de Runge-Kutta. Représenter* x *et* y *en fonction de* t *ainsi que* y *en fonction de* x. *Conclure.*